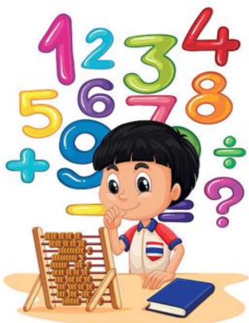
# ชุดฝึกทักษะระบบสมการเชิงเส้นและเมทริกซ์

สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 แผนการเรียนวิทย์-คณิต

รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม 2 รหัสวิชา ค 31202

เล่ม 5

## เรื่อง
## การใช้เมทริกซ์
## ในการแก้ระบบสมการเชิงเส้น



นางนภวรรณ บัญชานนท์
ตำแหน่งครู วิทยฐานะ ครูชำนาญการ

โรงเรียนอ้อมน้อยโสภณชนูปถัมภ์
อำเภอกระทุ่มแบน จังหวัดสมุทรสาคร
สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษา เขต 10

## การหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้น โดยใช้เมทริกซ์สามารถทำได้ 3 วิธี

### 1. การแก้ระบบสมการเชิงเส้น โดยใช้อินเวอร์สการคูณของเมทริกซ์

เปลี่ยนระบบสมการเชิงเส้น ให้อยู่ในรูปของเมทริกซ์ $AX = B$ ถ้า $A$ เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน ( $\det(A) \neq 0$ ) จะได้คำตอบของระบบสมการ คือ

$$X = A^{-1}B$$

**<u>ตัวอย่างที่ 1</u>** จงแก้ระบบสมการ

$$\begin{aligned} x + y + z &= 2 \\ 2x - y + 2z &= -5 \\ x + y - 2z &= -1 \end{aligned}$$

**วิธีทำ**

**1. เขียนระบบสมการเชิงเส้นในรูปเมทริกซ์ AX = B ได้เป็น**

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

**2. หา det (A)** นำหลักที่ 1 และ 2 ของ A มาเขียนต่อหลักที่ 3

$$\begin{array}{ccccc} & & -1 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ & & 2 & 2 & 2 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \det(A) &= [2 + 2 + 2] - [(-1) + 2 + (-4)] \\ &= 6 - (-3) \\ &= 9 \end{aligned}$$

**3. หา $A^{-1}$**

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\operatorname{adj}(A)$$

$$= \frac{1}{9}[c_{ij}(A)]^t$$

$$= \frac{1}{9}\begin{bmatrix} (-1)^{1+1}M_{11}(A) & (-1)^{1+2}M_{12}(A) & (-1)^{1+3}M_{13}(A) \\ (-1)^{2+1}M_{21}(A) & (-1)^{2+2}M_{22}(A) & (-1)^{2+3}M_{23}(A) \\ (-1)^{3+1}M_{31}(A) & (-1)^{3+2}M_{32}(A) & (-1)^{3+3}M_{33}(A) \end{bmatrix}^t$$

$$= \frac{1}{9}\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^t$$

$$= \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 2-2 & -((-4)-2) & 2-(-1) \\ -((-2)-1) & (-2)-1 & -(1-1) \\ 2-(-1) & -(2-2) & (-1)-2 \end{bmatrix}^t$$

$$= \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 0 & 6 & 3 \\ 3 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix}^t$$

$$= \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 6 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

### 4. หาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นที่กำหนดให้

ดังนั้น $X = A^{-1}B$

$$= \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 6 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 0+(-15)+(-3) \\ 12+15+0 \\ 6+0+3 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -18 \\ 27 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

นั่นคือ คำตอบของระบบสมการเชิงเส้นที่กำหนดคือ ( -2, 3, 1 )

## 2. การแก้ระบบสมการเชิงเส้น โดยใช้กฎของคราเมอร์ (Cramer's rule)

**ทฤษฎีบท (กฎของคราเมอร์ Cramer's rule)**

เมื่อกำหนดระบบสมการเชิงเส้นที่มี n สมการ และ n ตัวแปร ให้ $AX = B$ เป็นสมการเมทริกซ์ที่สัมพันธ์กับระบบสมการนี้ ให้ $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ ถ้า $\det(A) \neq 0$ แล้ว

คำตอบของระบบสมการนี้ คือ $x_1 = \dfrac{\det(A_1)}{\det(A)}$ , $x_2 = \dfrac{\det(A_2)}{\det(A)}$ , ... , $x_n = \dfrac{\det(A_n)}{\det(A)}$

เมื่อ $A_i$ คือเมทริกซ์ที่ได้จากการแทนที่หลักที่ i ของ A ด้วยหลักของ B ทุก $i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$

**<u>ตัวอย่างที่ 2</u>** จงแก้ระบบสมการ

$$\begin{aligned} x + y + z &= 2 \\ 2x - y + 2z &= -5 \\ x + y - 2z &= -1 \end{aligned}$$

**วิธีทำ** **1. เขียนระบบสมการเชิงเส้นในรูปเมทริกซ์ $AX = B$ ได้เป็น**

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

**2. หา det (A)** นำหลักที่ 1 และ 2 ของ A มาเขียนต่อหลักที่ 3

$$\begin{array}{ccccc} & & -1 & 2 & -4 \\ \left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{array}\right. & & & & \\ & & 2 & 2 & 2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

det (A) = [2 + 2 + 2] – [ (-1) + 2 + (-4) ]

= 6 – (-3)

= 9

**3. หาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นที่กำหนดให้**

$$x = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}$$

$$\begin{array}{c} \quad 1 \quad 4 \quad 10 \\ = \dfrac{\left|\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 1 \\ -5 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{array}\right| \begin{array}{cc} 2 & 1 \\ -5 & -1 \\ -1 & 1 \end{array}}{9} \\ \quad 4 \quad -2 \quad -5 \end{array}$$

$$= \frac{[4+(-2)+(-5)]-[1+4+10]}{9}$$

$$= \frac{(-3)-15}{9}$$

$$= \frac{-18}{9}$$

$$= -2$$

$$y = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}$$

$$= \frac{\begin{array}{|ccc|ccc} & & & -5 & -2 & -8 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & \\ 2 & -5 & 2 & 2 & -5 & \\ 1 & -1 & -2 & 1 & -1 & \\ & & & 10 & 4 & -2 \end{array}}{9}$$

$$= \frac{[10+4+(-2)]-[(-5)+(-2)+(-8)]}{9}$$

$$= \frac{12-(-15)}{9}$$

$$= \frac{27}{9}$$

$$= 3$$

$$z = \frac{\det(A_3)}{\det(A)}$$

$$= \frac{\begin{array}{|ccc|ccc} & & & -2 & -5 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & \\ 2 & -1 & -5 & 2 & -1 & \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & \\ & & & 1 & -5 & 4 \end{array}}{9}$$

$$= \frac{[1+(-5)+4]-[(-2)+(-5)+(-2)]}{9}$$

$$= \frac{0-(-9)}{9}$$

$$= \frac{9}{9}$$

$$= 1$$

นั่นคือ คำตอบของระบบสมการเชิงเส้นที่กำหนดคือ ( -2, 3, 1 )

## 3. การแก้ระบบสมการเชิงเส้น โดยใช้การดำเนินการตามแถว (Row operation)

ให้ A เป็นเมทริกซ์สัมประสิทธิ์

B เป็นเมทริกซ์ค่าคงตัว

X เป็นเมทริกซ์ตัวแปร

จากระบบสมการเชิงเส้นในรูปเมทริกซ์ $AX = B$

นำมาเขียนในรูปเมทริกซ์แต่งเติม $[A \,\vdots\, B]$ ใช้การดำเนินการตามแถว (row operation) เปลี่ยนเมทริกซ์แต่งเติมให้อยู่ในรูป $[I \,\vdots\, C]$ จะได้ $X = C$ ซึ่งการดำเนินการตามแถว สามารถทำได้ตามบทนิยามต่อไปนี้

**บทนิยาม**

ให้ A เป็น $m \times n$ เมทริกซ์ เรียกการดำเนินการต่อไปนี้ว่าเป็น **การดำเนินการตามแถว** (row operation) กับเมทริกซ์ A

1. สลับที่แถวที่ i และ j ของ A เขียนแทนด้วย $R_{ij}$
2. คูณสมาชิกในแถวที่ i ด้วยค่าคงตัว $c \neq 0$ เขียนแทนด้วย $cR_i$
3. เปลี่ยนแถวที่ i ของ A โดยนำค่าคงตัว c คูณสมาชิกในแถวที่ j ( $j \neq i$ ) แล้วนำไปบวกกับสมาชิกแต่ละตัวในแถวที่ i เขียนแทนด้วย $R_i + cR_j$

**บทนิยาม**

ถ้าเมทริกซ์ B ได้จากเมทริกซ์ A โดยการดำเนินการตามแถว แล้ว จะกล่าวว่า B สมมูลแบบแถว (row equivalent) กับเมทริกซ์ A เขียนแทน B สมมูลแบบแถวกับ A ด้วย $A \sim B$

**ข้อสังเกต** ถ้า B สมมูลแบบแถวกับ A แล้ว A ก็จะสมมูลแบบแถวกับ B ด้วย

**<u>ตัวอย่างที่ 3</u>** จงแก้ระบบสมการ

$$\begin{aligned} x + y + z &= 2 \\ 2x - y + 2z &= -5 \\ x + y - 2z &= -1 \end{aligned}$$

**วิธีทำ**

**1. เขียนระบบสมการเชิงเส้นในรูปเมทริกซ์ AX = B ได้เป็น**

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

**2. เขียนเมทริกซ์แต่งเติม แล้วใช้การดำเนินการตามแถว ได้ดังนี้**

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & -5 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ R_2 + (-2)R_1 \\ R_3 + (-R_1) \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{array}\right] -\frac{1}{3}R_2$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_1 + (-R_2) \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] -\frac{1}{3}R_3$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] R_1 + (-R_3)$$

นั่นคือ คำตอบของระบบสมการเชิงเส้นที่กำหนดคือ ( -2, 3, 1 )